Оглавление

[Задачи исследования операций. Венгерский метод. Решение задачи о назначениях 3](#_Toc470283930)

[1. Задачи исследования операций 3](#_Toc470283931)

[2. Постановка задачи о назначениях 4](#_Toc470283932)

[3. Предварительные сведения о методе решения задачи о назначениях 4](#_Toc470283933)

[4. Венгерский метод решения задачи о назначениях 8](#_Toc470283934)

[Основные понятия 9](#_Toc470283935)

[1. Задача распределительного типа 9](#_Toc470283936)

[2. Стандартные формы ЗЛП 11](#_Toc470283937)

[Основные утверждения линейного программирования 13](#_Toc470283938)

[1. Выпуклые множества 13](#_Toc470283939)

[2. Базисные решения 14](#_Toc470283940)

[3. Основные утверждения линейного программирования 17](#_Toc470283941)

[Симплекс-метод 17](#_Toc470283942)

[1. Симплекс-метод при известном БДР 18](#_Toc470283943)

[I. Выбор небазисной переменной для включения в базис 18](#_Toc470283944)

[II. Выбор базисной переменной для исключения из базиса 19](#_Toc470283945)

[2. Построение начального БДР 22](#_Toc470283946)

[Двойственные задачи 25](#_Toc470283947)

[1. Понятие двойственной задачи 25](#_Toc470283948)

[2. Основные соотношения двойственности 26](#_Toc470283949)

[Транспортная задача 28](#_Toc470283950)

[1. Постановка транспортной задачи 28](#_Toc470283951)

[2. Основные идеи метода потенциалов 31](#_Toc470283952)

[3. Построение начального БДР 31](#_Toc470283953)

[4. Улучшение текущего БДР 33](#_Toc470283954)

[Выбор небазисной переменной для включения в базис 34](#_Toc470283955)

[Выбор переменной для исключения из базиса 35](#_Toc470283956)

[5. Задача о назначениях 38](#_Toc470283957)

**Переходы по лекциям:**

* *Лекция №1 01.09.2016*
* *Лекция №2 15.09.2016*
* *Лекция №3 29.09.2016*
* *Лекция №4 13.10.2016*
* *Лекция №5 27.10.2016*
* *Лекция №6 10.11.2016*
* *Лекция №7 24.11.2016*
* *Лекция №8 08.12.2016*
* *Ошибка! Источник ссылки не найден.*
* *Ошибка! Источник ссылки не найден.*
* *Ошибка! Источник ссылки не найден.*

Лекция №1 01.09.2016

Власов Павел Александрович, ФН-12, 1025л, [pvlx@mail.ru](mailto:pvlx@mail.ru)

Три лабораторных, домашняя работа, экзамен.

# Задачи исследования операций. Венгерский метод. Решение задачи о назначениях

## Задачи исследования операций

Задача исследования операций обычно имеет вид

Здесь называется целевой функцией, – множеством допустимых решений.

В курсе функций нескольких переменных рассматривались задачи поиска экстремума (безусловного) ФНП:

и задача поиска условного экстремума

Обе эти задачи являются частными случаями задачи , но в исследовании операций обычно не рассматриваются.

В этом семестре мы будем рассматривать задачи, в которых множество допустимых решений G обладает специальными свойствами: является конечным или счетным, либо является выпуклым многогранником в .

Классификация некоторых задач исследования операций

1. Если – скалярная функция, то соответствующая задача называется задачей математического программирования.
2. Если – функция нескольких переменных, , то соответствующая задача называется задачей многокритериальной оптимизации.

Классификация задач математического программирования

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вид функции f** | **Структура области G** | **Название задачи** |
| Линейная | Выпуклый многогранник в | Линейного программирования |
| Квадратичная | –''– | Квадратичного программирования |
| Выпуклая | Выпуклая область в | Выпуклого программирования |
| Произвольная | Конечное множество | Дискретного программирования |
| Произвольная | *, н-я декартова степень множества целых* | Целочисленного программирования |
| Произвольная |  | Булева программирования |

Ознакомимся с задачами исследования операций на примере задачи о назначениях.

## Постановка задачи о назначениях

В распоряжении работодателя находится работ и исполнителей. Стоимость выполнения -й работы -м исполнителем составляет единиц. Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы каждый исполнитель выполнял ровно одну работу, а общая стоимость работ была минимальной.

Введём управляемые переменные («в нашей власти», можем менять). Пусть:

Тогда:

1. Общая стоимость выполнения всех работ
2. Условие того, что j-й исполнитель выполняет одну работу
3. Условие, что i-ю работу выполняет один исполнитель

Приходим к следующей математической постановке задачи о назначениях:

Иногда рассматривают вариант задачи о назначениях, в котором интерпретируется как прибыль, получаемая в результате выполнения -й работы -м исполнителем. В этом случае, та же целевая функция максимизируется.

Ниже мы покажем, как свести задачу максимизации к минимизации.

## Предварительные сведения о методе решения задачи о назначениях

Обозначение: – матрица стоимостей задачи о назначениях. – матрица назначен

**(I.)** Выполним над элементами матрицы следующие преобразования:

A) из каждого элемента -й строки матрицы вычтем число

Б) из каждого элемента -го столбца матрицы вычтем число

Полученную матрицу обозначим . Рассмотрим целевые функции

где – элементы матрицы . .

Найдём зависимость между .

Из постановки задачи о назначениях,, поэтому

*,* следовательно,

Задачи с матрицами являются эквивалентными, т.к. целевые функции этих задач достигают своих оптимальных значений при одной и той же матрице Х. Т.е. их оптимальные решения (Х) совпадают.

**Определение:** Матрицы будем называть ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с использованием описанных выше преобразований а) и б). Таким образом, эквивалентным матрицам стоимостей отвечают эквивалентные задачи о назначениях.

**(II.)** **Определение**: ***системой независимых нулей*** матрицы стоимостей будем называть такой набор нулевых элементов этой матрицы, что никакие два нуля этого набора не стоят ни в одной общей строке и ни в одном общем столбце.

Предположим, что в некоторой матрице найдена такая СНН, которая содержит элементов. В этом случае, сразу можно выписать решение задачи о назначениях с этой матрицей .

**Пример**:

Тогда

потому что , но *.*

**(III.)** Таким образом, понятно, что для решения задачи о назначениях нужно добиться того, чтобы матрица стоимостей содержала как можно больше нулей (чтобы построить СНН из n элементов).

Предложим следующий метод:

1. в каждом столбце исходной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов этого столбца
2. аналогичную процедуру проводим со строками матрицы

В результате этих двух пунктов получим матрицу , каждая строка и столбец которой содержит по крайней мере один ноль.

1. строим первоначальную СНН: просматриваем столбцы матрицы сверху вниз в поисках нулей. Если в одной строке с найденным нулем не стоит отмеченный **0\***, то отмечаем этот **0\***. Набор **0\*** и будет первоначальной СНН.
2. если полученная СНН содержит n элементов, то решение задачи можно выписать по правилу (см. выше). В противном случае, текущую СНН нужно улучшать (обсудим позже).

**Пример:**

. Применим метод. Наименьшие по столбцам – 1, 2, 2, 1. Вычитаем из столбцов,

. Нулей мало – надо улучшать систему.

Заметим, что в 1й строке, которая содержит **0\***, располагается также «просто» нуль. В 1,3,4 столбце нет смысла искать нули для включения СНН; можно пометить их «+».Можно попытаться перестроить текущую СНН, включив в неё этот «просто» нуль .

. Тогда текущий **0\*** из первой строки необходимо исключить из СНН – следовательно, в первом столбце можно искать ещё какие-то нули кроме первого.

Все строки и столбцы отмеченные + будем называть выделенными; как и стоящие в них элементы.

От текущего ***0'*** движемся по столбцу до **0\***, оттуда по строке до ***0'***, оттуда ... пока не упремся в последний ***0'***.

В пределах этой построенной L-цепочки, из всех 0\* надо сделать 0', и наоборот. Этим мы увеличиваем СНН по крайней мере на один нуль.

. СНН содержит 4 нуля, можно выписать решение задачи .

.

Лекция №2 15.09.2016

Пример

Мало, систему нужно улучшать. Выделяем столбцы, где стоят нули со звездочками, среди оставшихся невыделенных рисуем штрих. Если его включить в систему, то мы не имеем права в первой строке брать нули со звездочками

Решение

Данный метод не универсален. Возможна ситуация когда на некотором шаге среди невыделенных элементов не окажется нулей:

#### Второй способ

1. Если среди невыделенных элементов нет 0, то находим минимальный элемент среди невыделенных элементов.

2. Вычитаем из невыделенных строк.

3. Прибавить к выделенным столбцам.

Пример: (см. выше)

Если вычесть из невыделенных строк и прибавить к выделенным столбцам, то получим следующее:

Обязательно появляется нуль среди невыделенных элементов, и преобразования продолжаются дальше.

Возможна цепочка из одного единственного 0'.

Опишем метод полностью.

## Венгерский метод решения задачи о назначениях



Первые 3 шага составляют так называемый подготовительный этап венгерского метода. Всё остальное – основной этап этого метода

Иногда встречается такая версия задачи о назначениях, в которой интерпретируются не как затраты, а как прибыль, получаемая при назначении на i-ю работу j-го исполнителя. В этом случае задача о назначениях является задачей максимизации. Покажем, как свести эту задачу к эквивалентной задаче минимизации.

1. В функции коэффициенты , следовательно, такая функция не является целевой функцией задачи о назначениях
2. Выберем среди элементов матрицы максимальный элемент
3. Добавим M к каждому столбцу матрицы .

Получим задачу о назначениях (как задачу минимизации), эквивалентную исходной задаче.

Линейное программирование

# Основные понятия

## Задача распределительного типа

Пример:

Кондитерская фабрика изготавливает два вида карамелек, для производства которых используется сахарный песок и фруктовое пюре. Данные о затратах приведены в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Затраты (т) на производство 1 тонны | | Общее количество (запасы) |
|  | **I** | **II** | **тонны** |
| **Песок** | 1 | 3 | 13 |
| **Пюре** | 3 | 2 | 18 |

Реализация 1 тонны карамели I-го типа дает прибыль 1 миллион, а II-го типа 2 миллиона. Составить план производства карамели каждого вида, при котором общая прибыль от реализации максимальна, если дополнительно известно, что рыночный спрос на карамель второго вида не превосходит четырех тонн.

Решение: введём управляемые переменные – объём производства карамели I вида в тоннах; – второго вида.

Тогда

1) общая прибыль будет (млн.руб.)

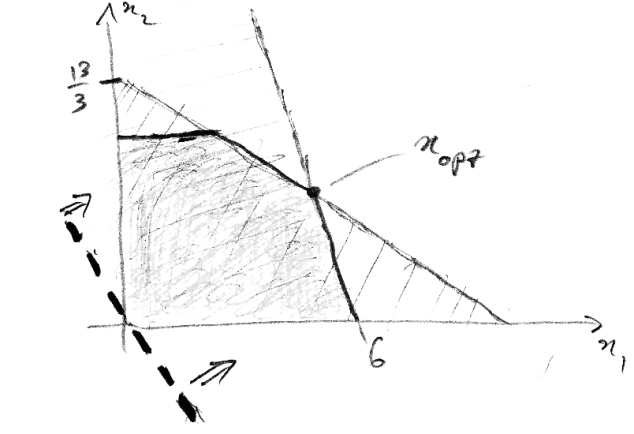
2) необходимое количество сахарного песка для обеспечения этих объёмов: ,  
пюре:

Математическая постановка:

Задача линейного программирования.

Лекция №3 29.09.2016

Для решения задачи применим ***графический метод***. Так как переменных две, то изобразим на плоскости множество допустимых решений.



Если в вместо поставим , то получим прямую; точки удовлетворяющие неравенству будут расположены внизу от прямой. Аналогично для . Если построить все неравенства, то получим итоговый заштрихованный прямоугольник, содержащий все допустимые точки.

Если представить, что к двум осям представлена ось f, то графиком функции будет плоскость (линейная функция двух переменных). Попробуем понять, как она пересекает плоскость .

(---) след плоскости. Если подставить любую точку из плоскости, то убедимся что f положительная. Более наукообразно – вычислить градиент

Оптимальной будет такая точка, которую получим, перемещая прямую-след параллельно самой себе, пока она цепляет хотя бы одну точку из множества допустимых решений. Для сделанного рисунка: точка

Она является пересечением прямой (2) и прямой (3). Решая совместно эти уравнения,

– точка с координатами (4,3)

**Ответ**: максимальная прибыль будет при 4 тоннах конфет I вида и 3 тоннах конфет II вида. При этом сама прибыль

Если в итоге будет не конкретная точка, а параллельная линия, то ответ: «оптимальными будут все точки отрезка (A,B)»

На примере этой задачи можно заметить некоторые закономерности, общие для всех ЗЛП.

1. Множество допустимых решений является выпуклым
2. Оптимальное значение целевой функции достигается в крайней (угловой) точке множества допустимых решений.
3. Если оптимальными являются несколько допустимых решений, то все точки их выпуклой линейной комбинации также будут оптимальными. Например: если в рассмотренном примере линия уровня целевой функции была бы параллельна AB, то оптимальными были бы все точки отрезка

## Стандартные формы ЗЛП

**Определение:** говорят, что ЗЛП записана в ***общей форме***, если она имеет вид

И в ***стандартной форме***, если имеет вид

***Признаки*** стандартной формы:

1. Целевая функция **максимизируется**
2. Все ограничения имеют вид **равенств** с **неотрицательными** правыми частями
3. Все переменные подчинены условиям **неотрицательности**

Оказывается, любая ЗЛП может быть приведена к стандартной форме. Докажем это.

1. Если целевая функция минимизируется, то переходим к функции
2. Если некоторое ограничение имеет вид с отрицательной правой частью, то перейдем к эквивалентному ограничению, умножив обе части на -1:
3. Если некоторое ограничение имеет вид неравенства , то введём дополнительную переменную : к левой части добавляем эту переменную и выравниваем неравенство до равенства, при этом должна быть неотрицательная:
4. граничение имеет вид неравенства , то также введём дополнительную , которую из левой части вычитаем, «подправив» до .
5. Если некоторая переменная , то введём вместо неё переменную .
6. Если некоторая переменная не ограничена в знаке (может принимать + и – значения), то представим её в виде , где обе ' неотрицательные

Пример: привести к стандартной форме

Переходим к функции . Переходим от неравенств , к равенствам , вводя переменные . Вводим для отрицательной переменной. Правила 1, 4 и 5. Правило 6: представляем в виде разности.

Продолжаем перевод. ,

~~==~~

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

– число ограничений, – число слагаемых. Введем обозначения:

Тогда с использованием матричных операций, задача в стандартной форме может быть записана в виде

Где

В дальнейшем, рассматривая **стандартную форму ЗЛП**, всегда будем предполагать, что выполнены следующие **условия**:

1. Ранг матрицы равен рангу блочной матрицы: .  
   В соответствие с критерием Кронекера-Копелли, СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Если это условие не выполнено, то СЛАУ, входящая в систему ограничений , несовместна – т.е. не имеет решений. В этом случае, множество допустимых решений ЗЛП пусто – оптимизировать нечего.
2. – числу ограничений. Если , то некоторые ограничения являются линейными комбинациями остальных – следовательно, их можно отбросить, не изменив множество допустимых решений.
3. Число переменных . Если , то существует ровно одно единственное решение системы . Следовательно, ЗЛП имеет не более 1 допустимого решения, а задача оптимизации вырождена.

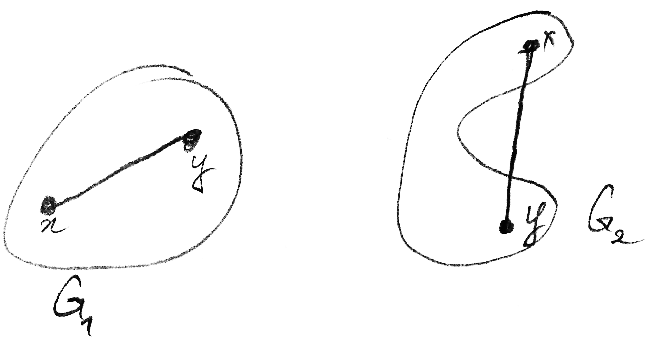
# Основные утверждения линейного программирования

## Выпуклые множества

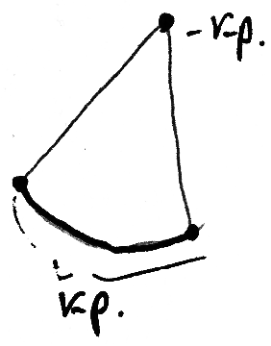
Пусть .

**Определение: *Отрезком***, соединяющим и , называется следующее множество точек:

Множество называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками множество целиком содержит соединяющий их отрезок. Т.е. .



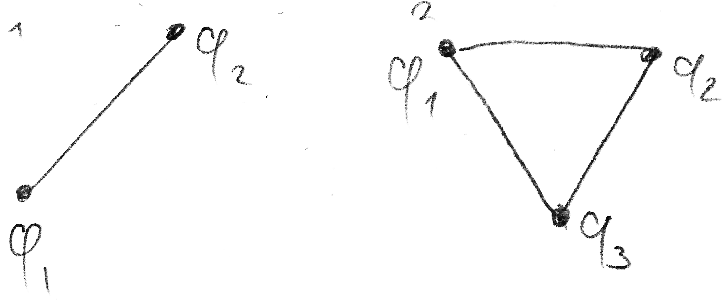
Точка выпуклого множества называется ***крайней точкой*** этого множества , если не содержится ***строго*** *внутри* никакого отрезка, целиком лежащего в .



**Определение: *Выпуклой комбинацией*** точек называется следующее множество

***Пример***:

1. Выпуклая комбинация двух точек – отрезок.
2. Трех точек - треугольник



~~==~~

Можем доказать, что

1. является выпуклым множеством
2. Эта выпуклая комбинация является наименьшим среди выпуклых множеств, которые содержат все точки .

***Теорема***:

Пусть

1. Множество – выпукло,
2. Ограничено,
3. Имеет конечный набор краевых точек .

Тогда можно представить как выпуклую комбинацию его крайних точек. То есть такие, что

Ниже мы увидим, что

1. Множество допустимых решений ЗЛП выпукло
2. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно достигается в крайней точке множества допустимых решений.

## Базисные решения

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме

Где

Рассмотрим СЛАУ .

Предположим, что первых столбцов линейно независимы, их можно выбрать в качестве базовых столбцов. Обозначим

В векторной форме, СЛАУ может быть записана в виде . То есть

Выразим из этого равенства . Т.к. столбцы матрицы линейно независимы, а сама матрица имеет размеры , то определитель и матрица имеет обратную. Тогда будет равен

Мы выразили базисные переменные через небазисные. Решение всей системы можно записать в виде

Небазисные переменные из вектора могут принимать любые значения. Каждому конкретному набору значений этих переменных отвечает некоторый набор значений базисных переменных (см. формулу ), следовательно, некоторое решение СЛАУ . Совокупность всех этих решений и образует общее решение этой линейной системы.

**Определение:** ***базисным решением*** линейной системы называется то её частное решение, которое отвечает нулевым значениям небазисных переменных. Т.е. в наших обозначениях, базисное решение будет

Замечание:

1. Базисное решение однозначно определяется выбором базисных столбцов матрицы . Выбор их равносилен выбору базисных переменных. Поэтому, базисных решений не более чем – некоторые наборы столбцов могут быть линейно зависимы.
2. Базисное решение СЛАУ необязательно является допустимым решением ЗЛП, т.к. возможно не удовлетворяет условию неотрицательности

Базисное решение слау Ах=б называется ***базисным допустимым решением*** (БДР), если .

БДР тем более не более штук.

Базисное решение называется ***вырожденным***, если одна или несколько базисных переменных в нём равны 0. Ниже мы увидим, что всякое БДР ЗЛП в стандартной форме отвечает некоторой крайней точке множества допустимых решений Г и наоборот.

Лекция №4 13.10.2016

***Пример***:

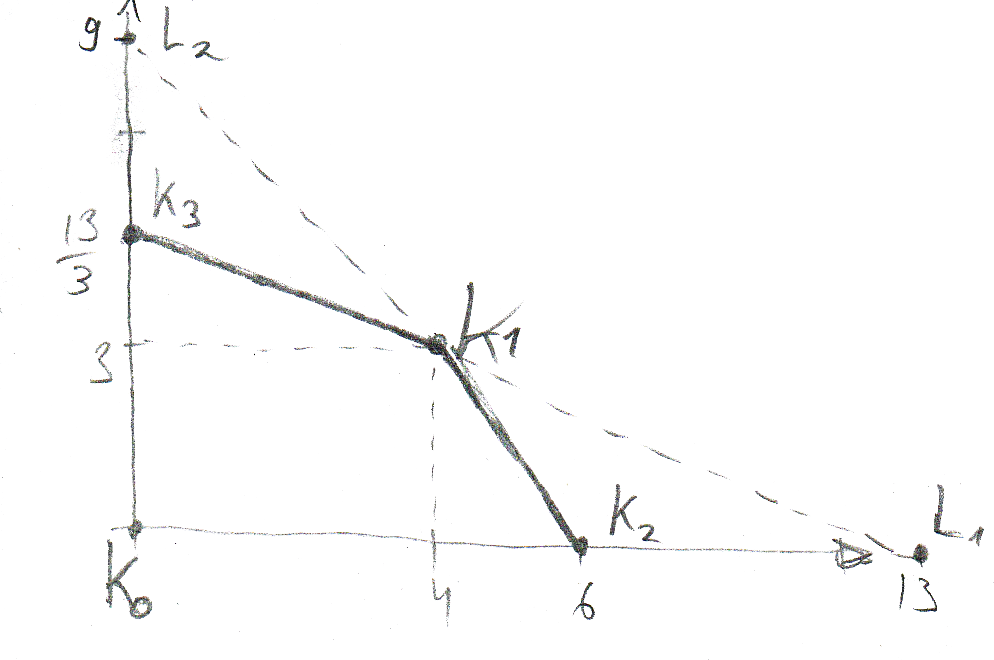
Рассмотрим линейные ограничения из задачи о производстве карамели (без ограничения )

Приведем ограничения к стандартной форме:

I. Выберем базисными 1 и 2 столбцы матрицы А. Тогда – базисные, – не базисные.

***ШТО***

Соответственно, допустимо.



II. Выберем базисами 1 и 3 столбцы А,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номера базисных столбцов | Базисные неизвестные | Небазисные неизвестные | Базисное решение | Краевая точка |
| 1,2 |  |  | (4,3,0,0) | K1 |
| 1,3 |  |  | (6,0,7,0) | K2 |
| 1 4 |  |  | (13 0 0 -21) не доп | L1 |
| 2 3 |  |  | (0 9 -14 0) не доп | L2 |
| 2 4 |  |  |  | K3 |
| 3 4 |  |  | 0 0 13 18 | K0 |

## Основные утверждения линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме

Обозначим

– множество допустимых решений этой задачи.

**Теорема 1**. – выпуклое множество.

Доказательство. Выберем две точки

Покажем, что

2) Покажем, что она удовлетворяет второму ограничению неотрицательности

Поскольку , лямбды>0

**Теорема 2**. Пусть не пусто, тогда содержит БДР.

**Теорема3**. Базисные допустимые решения ЗЛП в стандартной форме являются крайними точками множества .

**Теорема 4**. Крайние точки множества являются БДР.

**Теорема 5**. 1) Пусть функция принимает максимальное значение в некоторой точке множества . Тогда, принимает это значение по крайней мере в одной крайней точке множества .

2) Если принимает максимальное значение в точках , то принимает это значение в любой точке их выпуклой комбинации

# Симплекс-метод

Выше мы вели речь о том, что если ЗЛП имеет оптимальное решение, то целевая функция достигает оптимального значения в крайней точке множества допустимых решений. Т.к. крайние точки этого множества однозначно соответствуют БДР (которых не более чем ), то и имеет конечное число крайних точек.

В качестве метода решения ЗЛП можно предложить следующее. Находим все БДР рассматриваемой задачи, на каждом из них вычисляем значение целевой функции, и выбираем то БДР, которое доставляет ей наибольшее значение.

В симплекс-методе эта идея несколько модернизирована. На очередном шаге новое БДР выбирается таким образом, чтобы значение целевой функции на нем было больше (или, по крайней мере, не меньше) чем на текущем.

## Симплекс-метод при известном БДР

При реализации изложенной выше идеи встает вопрос нахождения начального БДР. Ниже мы укажем способ решения этого вопроса, пока же будем считать, что некоторое (текущее) БДР нам известно. Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме

Будем считать, что текущее БДР отвечает первым столбцам матрицы А.

Тогда ЗЛП можно представить в виде

Где

Данную систему называют ***канонической*** формой ЗЛП, отвечающей выбранному базису.

**Признаки** канонической формы:

1. *Базисные* переменные выражены через небазисные
2. Выражение для целевой функции содержит *только небазисные* переменные, остальные оттуда изжиты

Для построения нового БДР необходимо построить или выбрать новый базис среди столбцов матрицы . Или, что то же самое, выбрать новый набор базисных переменных. Для этого можно сделать следующее.

1. Некоторую небазисную переменную включить в базис.
2. Некоторую базисную переменную оттуда исключить. Получим новый базис.

### Выбор небазисной переменной для включения в базис

Рассмотрим . Предположим, что небазисная переменная будет включена в базис. Став базисной в новом БДР она может принять положительное значение:

Тогда значение целевой функции ф на новом БДР будет равно . Т.к. мы решаем задачу максимизации, то выгодно включать в базис такую небазисную переменную , для которой . Принцип оптимальности заключается в том, что в базис включается та переменная , для которой максимально среди положительных коэффициентов. Т.е.

Замечания:

1. При этом необязательно новое значение будет «самым большим» среди возможных значений.

Допустим . Следуя принципу оптимальности, в базис включим переменную , но при этом не факт что новое значение ф при в базисе будет непременно больше .

1. Если вдруг окажется, что все , то текущее значение целевой функции улучшить нельзя, следовательно, текущее БДР – оптимальное решение.

### Выбор базисной переменной для исключения из базиса

Пусть в базис должна быть включена небазисная переменная Поскольку значение целевой функции будет

*,* то новое значение при этой переменной «выгодно» выбирать максимально бо́льшим.

Рассмотрим . Т.к. все переменные , кроме , остались небазисными, то их значения в новом БДР будут равны 0. Следовательно, уравнения из (\*) примут следующий вид:

При увеличении значения изменяются значения базисных переменных. При достаточно большом , некоторые из базисных переменных могут обнулиться, а при дальнейшем увеличении даже стать отрицательными. Таким образом, значение в новом БДР выбирается из условия – принцип допустимости.

Та переменная , для которой , обнулится первой и должна быть исключена из базиса.

Замечания: 1) Если указанный минимум достигается для нескольких переменных (т.е. при обнулятся 2 или более базисных переменных), то из базиса может быть исключена любая из них, но только одна.

2) если все , то целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых решений, т.е. задача оптимизации не имеет решения.

Лекция №5 27.10.2016

***Пример***:

Решить ЗЛП:

Приведем задачу к стандартной форме ЗЛП.

Все дополнительные переменные входят в левые части ограничений по одному разу и со знаками «+», а все правые части >0. Это значит, что если выбрать в качестве базисных , то соответствующее БДР будет таким:

I итерация:

Для построения каноничной формы, отвечающей выбранному базису, выразим базисные переменные через небазисные:

Или

Столбец при – это при –

В базис нужно включить . Тогда система ограничений:

Первый столбец – это , второй – это .

Следовательно, из базиса исключаем .

II итерация:

Построим каноническую форму для базиса 2 3 5:

Выразим целевую функцию через небазисные переменные

, включаем в базис.

Тогда,

Второй столбец – беты, первый альфы

III итерация:

Построим каноничную форму для базиса :

Выразим целевую функцию через небазисные:

Все текущий базис оптимальный.

Оптимальное решение:

Проведенные вычисления удобно организовать в виде таблиц, которые называются ***симплекс-таблицами***.

Базис: .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № итерации | Базисные переменные | Значения БП | X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |  |
| I |  | 400 | 1 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 – не рассматриваем |
|  | 300 | 0 | (1) | 0 | **1** | 0 | min->x4 из базиса |
|  | 500 | 1 | 1 | 0 | 0 | **1** |  |
|  | 0 | 2 | **5** | 0 | 0 |  | 5 max в ряду -> x2 в базис |
| II |  | 400 | 1 | 0 | **1** | 0 | 0 |  |
|  | 300 | 0 | **1** | 0 | 1 | 0 | 0 – не рассматриваем |
|  | 200 | (1) | 0 | 0 | -1 | **1** | 200/1=>x5 из базиса |
|  | -1500 | 2 | 0 | 0 | -5 | 0 | 2 max в ряду -> x1 в базис |
| III |  | 200 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |  |
|  | 300 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |
|  | 200 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |  |
|  | -1900 | 0 | 0 | 0 | -3 | -2 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ит | БП | Знач. |  | X2 | X3 | X4 | X5 |  |
| I | X3 | 4 | 2 | -1 | **1** | 0 | 0 | -> Исключить любую но только одну |
| X4 | 2 | (1) | -2 | 0 | **1** | 0 | ->X4 из базиса |
| X5 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | **1** | 5 |
| -f | 0 | 3 | -1 | 0 | 0 | 0 | 3 max в ряду -> x1 в базис |
| 2 | X3 | 0 | 0 | (3) | **1** | -2 | 0 | 0/3 X3 из базиса |
| X1 | 2 | **1** | -2 | 0 | 1 | 0 |  |
| X5 | 3 | 0 | 3 | 0 | -1 | **1** | 3/3 |
| -f | -6 | 0 | 5 | 0 | -3 | 0 | X2 в базис |
| 3 | X2 | 0 | 0 | **1** | 1/3 | -2/3 | 0 |  |
| X1 | 2 | **1** | 0 | 2/3 | -1/3 | 0 |  |
| X5 | 3 | 0 | 0 | -1 | (1) | **1** | Из базиса |
| -f | -6 | 0 | 0 | -5/3 | 1/3 | 0 | X4 в базис |
| 4 | Ч2 | 2 | 0 | 1 | -1/3 | 0 | 2/3 |  |
| Ч1 | 3 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 1/3 |  |
| Ч4 | 3 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |  |
| -f | -7 | 0 | 0 | -4/3 | 0 | -1/3 |  |

## Построение начального БДР

Во всех разобранных выше примерах в стандартной форме ЗЛП все дополнительные переменные входили в левые части равенств со знаком «+». Поэтому, мы выбирали их в качестве базисных. В общем случае это не так. Построение начального БДР может оказаться нетривиальной задачей.

Если первых столбцов матрицы А привели к недопустимому базисному решению, выберем снова столбцы, снова решим, снова убедимся что являются/не являются допустимым, иначе выберем новые столбцы…

Хотелось бы иметь надежный метод построения начального БДР.

Для построения начального БДР можно решать вспомогательную ЗЛП, переменные которой называются ***искусственными*** переменными. После решения этой задачи, т.е. после построения БДР исходной задачи, целевая функция вспомогательной задачи и искусственные переменные более не рассматриваются.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме

Вспомогательная ЗЛП:

В качестве начального базиса для вспомогательной задачи можно использовать искусственные переменные .

Как только все искусственные переменные обнулятся, то они будут выведены из базиса и больше рассматриваться не будут вообще. Переменные вектора , которые будут отвечать оптимальному базису вспомогательной задачи, будут образовывать как раз начальный базис для исходной задачи.

Замечание: если в результате решения вспомогательной задачи оптимальное значение целевой функции , то исходная ЗЛП не имеет допустимых решений.

Лекция №6 10.11.2016

***Пример***:

Приведем эту задачу к стандартной форме ЗЛП:

Здесь дополнительные переменные , входят в левые части ограничений со знаком +: это значит, что их можно взять в качестве базисных.

Составим вспомогательную задачу:

Чтобы решить вспомогательную задачу с помощью симплекс-метода, в качестве начального базиса используют переменные .

Тогда нужно целевую функцию привести в канонический вид, отвечающий этому базису.

Из первого ограничения:

Из второго:

Тогда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ит | БП | Знач. |  | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | Y1 | Y2 |  |
| 1 | Y1 | 10 | (1) | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 10/1=>Y1 из базиса |
| Y2 | 5 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | **1** | 20/1 |
| X5 | 20 | 1 | 1 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 |  |
| X6 | 20 | -1 | 4 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 |  |
| -f | 0 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| -w | 15 | 1 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | X1 в базис |
| 2 | X1 | 10 | **1** | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| Y2 | 5 | 0 | (1) | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | **1** | 5/1 => Y2 iz bazisa |
| X5 | 10 | 0 | 1 | 1 | 0 | **1** | 0 | -1 | 0 | 10/1 |
| X6 | 30 | 0 | 4 | -1 | 0 | 0 | **1** | 1 | 0 | 30/4 |
| -f | -30 | 0 | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 |  |
| -w | 5 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | X2 v bazis |
| 3 | X1 | 10 | **1** | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |  |
| X2 | 5 | 0 | **1** | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |  |
| X5 | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | -1 | -1 |  |
| X6 | 10 | 0 | 0 | -1 | (4) | 0 | **1** | 0 | -4 | min -> x6 iz bazisa |
| -f | -50 | 0 | 0 | 3 | 4 | 0 | 0 | -3 | -4 | 4 max -> x4 v basis |
| -w | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | => оптимальна |

– начальный базис для использования симплекс-метода для решения исходной ЗЛП.

в базис, из базиса.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ит | БП | Знач. |  | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
| 4 | X1 | 0 | **1** | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |  |
| X2 | 7.5 | 0 | **1** | -0.25 | 0 | 0 | (0.25) |  |
| X5 | 2.5 | 0 | 0 | 1.25 | 0 | **1** | (-0.25) | X5 iz bazisa |
| X4 | 2.5 | 0 | 0 | -0.25 | **1** | 0 | 0.25 |  |
| -f | -60 | 0 | 0 | (4) | 0 | 0 | -1 | X3 v basis |
| 5 | X1 | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.8 | -0.2 |  |
| X2 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.2 | 0.2 |  |
| X3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.8 | -0.2 |  |
| X4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.2 | 0.2 |  |
| -f | -68 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3.2 | -0.2 | =>opt |

# Двойственные задачи

## Понятие двойственной задачи

Понятие двойственности в линейном программировании позволяет установить взаимосвязи для анализа моделей на чувствительность. Каждой задаче линейного программирования отвечает некоторая другая ЗЛП, которая называется ***двойственной***, по отношению к исходной задаче.

При этом сама исходная задача называется ***прямой*** задачей.

ПО определению, ***стандартной формой прямой задачи*** называется задача следующего вида:

Здесь необязательно выполняется условие неотрицательности вектора .

Замечание: ниже мы покажем, что любая ЗЛП может быть представлена в стандартной форме прямой задачи.

По определению, задачей, ***двойственной*** задаче (1), называется задача следующего вида:

При этом, (2) называется ***стандартной формой двойственной задачи***.

***Пример***:

Просят составить двойственную. Сначала приведем к стандартной форме прямой задачи:

Каждому ограничению прямой задачи отвечает некоторая переменная двойственной задачи: у1 у2 у3’ у3’’.

Обозначим . Тогда:

~~==~~

Замечание: если некоторое ограничение прямой задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи не ограничена в знаке.

***Пример***:

Составим двойственную:

1. Приведем исходную задачу к стандартной форме прямой задачи,
2. Двойственная задача:

3 и 4 можно объединить записав их в таком виде: и .

Тогда,

Таким образом, если некоторая переменная прямой задачи не ограничена в знаке, то соответствующее ограничение двойственной задачи является равенством.

## Основные соотношения двойственности

***Теорема1***: задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

***Доказательство***: прямая задача имеет вид

Двойственная:

Двойственная в стандартной форме прямой

Двойственная к двойственной:

***Теорема2***: пусть прямая задача имеет допустимое решение . Двойственная имеет допустимое решение . Тогда,

***Доказательство***:

Прямая задача Двойственная

Т.к. – допустим, то .

Умножим обе части неравенства слева на , причем этот вектор неотрицателен.

Правая часть имеет размеры – то есть это скаляр. Если мы транспонируем обе части, то получим

Т.к. транспонирование произведения матриц есть произведение транспонированных в обратном порядке, то

– допустимое решение двойственной задачи, следовательно

Умножим обе части слева на

Наконец, из \* и \*\* получаем:

Т.е.,

***Следствие***: если целевая функция прямой задачи не ограничена сверху на множестве допустимых решений, то двойственная задача существует, но не имеет допустимых решений.

***Теорема3***: пусть 1 х0 допустимое решение прямой задачи 2 у0 обратной 3 ф(х0)=п(у0)

Тогда

*– оптимальное решение прямой, а у 0 – двойственной задачи*

***Доказательство***:

Покаем что х0 оптимаотлное решение прямой задачи. Для любого допустимого решения прямой задачи согласно теореме 2 ф(х)Б=п(у0).

Другое Аналогично

***Теорема4***:Пусть прямая задача имеет конечное оптимальное решение х0. Тогда: 1) двойственная задача имеет конечное оптимальное решение у0. 2) при этом

Без доказательства

***Теорема5***:условия дополняющей нежесткости

Пусть – оптимальное решение прямой задачи, у0 ЫЫЫЫ – двойственной.

Тогда

***Доказательство***:

Прямая задача Двойственная

1) Т.к. х0,у0 оптимальные решения, следовательно они допустимы. Значит,

Умножим первое на У0:Т и второе на Х0:Т

=>

2) Поскольку х0 у0 оптимальные то ф(х0)=п(н0). В то же время, как показывали выше,

Таким образом, левые и правые части этих неравнетсв совпадают, значит оба неравенства являются равенствами.

1. Рассмотрим второе равенство

В координатной форме оно имеет вид

Поскольку игрек допустим, то все скобки >=0. В то же время, х0 тоже допустим, стало быть все иксы неотрицательны. Каждое слагаемое в сумме неотрицательно – то есть ноль. Таким образом, хж0()=0 для явсех ж от 1 до н

Второе соотношение доказывается аналогично.

Лекция №7 24.11.2016

# Транспортная задача

## Постановка транспортной задачи

Содержательная постановка: имеется производителей некоторой однородной продукции. Мощность -го производителя . Имеется потребителей продукции, мощность -го потребителя единиц. Стоимость перевозки единицы продукции от -го производителя к -му потребителю составляет единиц. Требуется: составить план перевозок продукции от производителей к потребителям так, чтобы были выполнены все ограничения по мощности и общая стоимость перевозок была бы минимальной

Замечание: в такой постановке предполагается, что суммарные мощности производителей и потребителей совпадают:

в противном случае, задача не будет иметь смысла. При выполнении условия \* задача называется ***сбалансированной***.

Введем управляемые переменные – объём продукции, перевозимой от -го производителя к -му потребителю. С учетом этого обозначения:

1. Общая стоимость всех перевозок
2. Объем продукции, вывозимой от производителя
3. Объем продукции, завозимой потребителю

Таким образом, приходим к задаче:

Условие задачи, а также допустимые планы перевозок, удобно задавать с использованием т.н. транспортной таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | D1 | … | Dj | … | Dn |
| S1 |  |  |  |  |  |
| … |  |  |  |  |  |
| Si |  |  |  |  |  |
| … |  |  |  |  |  |
| Sm |  |  |  |  |  |

В контексте задачи, производителей часто называют ***источниками***, а потребителей – ***стоками***.

Легко заметить, что транспортная задача является ЗЛП с переменными – т.е. может быть решена с использованием симплекс-метода. Однако он неэффективен ввиду большого числа переменных. Мы предложим метод потенциалов вместо симплекс-метода.

Замечание: система ограничений сбалансированной задачи не является независимой.

Сложим ограничения по стокам в сумму , ограничения по источникам со 2-го по -й в сумму . Вычтем из суммы сумму , получим:

Таким образом, 1-е ограничение является линейной комбинацией остальных ограничений. Следовательно, система ограничений содержит не более чем независимых ограничений.

Можно показать, что

А) Любое из ограничений является линейной комбинацией остальных

Б) исключение любых двух ограничений приведет к расширению множества допустимых решений – следовательно, система ограничений содержит ровно независимых ограничений

## Основные идеи метода потенциалов

Стандартная форма задачи двойственная:

Составим двойственную к транспортной задаче:

Из полученных ранее соотношений двойственности следует, что если

1. удовлетворяет ограничению прямой задачи
2. удовлетворяют ограничению двойственной задачи
3. выполнены условия дополнительной нежесткости

то – оптимальное решение прямой задачи, – оптимальные решения двойственной задачи.

На этих соображениях основан метод потенциалов. Его общая идея:

1. сперва строят некоторое начальное БДР прямой задачи
2. это решение итерационно улучшают так, что на каждом шаге выполнены условия (1) и (3) выше
3. при выполнении условия (2) вычисление прекращают

## Построение начального БДР

Одним изметодов построения начального БДР является ***метод северо-западного угла***.

***Пример***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 50=50 | d1=5 | d2=25 | d3=10 | d4=10 |
| s1=10 | **5** |  |  |  |
| s2=15 |  |  |  |  |
| s3=25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 50=50 |  | d2=25 | d3=10 | d4=10 |
| s1=5 | **5** | 5 |  |  |
| s2=15 |  |  |  |  |
| s3=25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 50=50 |  | d2=15 | d3=10 | d4=10 |
|  | **5** | 5 |  |  |
| s2=15 |  | 15 |  |  |
| s3=25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 50=50 |  | d2=15 | d3=10 | d4=10 |
|  | **5** | 5 |  |  |
|  |  | 15 |  |  |
| s3=25 |  | 5 | 10 | 10 |

Независимых ограничений м+н-1=6; 6 базисных переменных

**~==~**

***Пример***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 | 10 | 10 | 15 | 10 |
| 5 | 5 |  |  |  |
| 15 |  |  |  |  |
| 25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 | 5 | 10 | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
| 15 | 5 |  |  |  |
| 25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 |  | 10 | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
| 10 | 5 | 10 |  |  |
| 25 |  |  |  |  |

Поскольку при заполнении клетки (2,2) обнуляются разом и мощность источника, и мощность стока, то вычеркнуть можно либо строку, либо столбец, но не оба разом.

Вычеркнем строку:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 |  | 10 | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
| 10 | 5 | 10 |  |  |
| 25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 |  |  | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
| 10 | 5 | 10 |  |  |
| 25 |  | 0 | 15 | 10 |

//////////////

Вычеркнем столбец:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 |  | 10 | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
| 10 | 5 | 10 |  |  |
| 25 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 45=45 |  | 10 | 15 | 10 |
|  | 5 |  |  |  |
|  | 5 | 10 | 0 |  |
| 25 |  |  | 15 | 10 |

//////////////

Замечание:

1. Во всех разобранных примерах значение базисных переменных задавались соотношениями вида  
   этот факт не случаен и справедлив не только для начального БДР.
2. Из (\*) следует, что если мощности всех источников являются целыми, то любое БДР транспортной задачи также будет целым.

По определению, транспортная задача называется ***классической***, если мощности всех источников и всех стоков являются целыми числами.

## Улучшение текущего БДР

Пусть – некоторое БДР. Рассмотрим систему ограничений

Умножим уравнения из системы ограничений на (см. систему), сложим их и вычтем сумму из выражения :

Подберем так, чтобы коэффициенты при базисных переменных в левой части (1) равнялись 0 (как форма целевой функции). Получим уравнение:

Эта система содержит уравнение, по числу базисных переменных, и неизвестных. Число неизвестных на 1 больше числа уравнений – т.к. одно ограничение в транспортной задаче является избыточным.

Решим эту систему, придав одной из неизвестных (любой) произвольное значение. Таким образом, ***найдем .***

Далее:

### Выбор небазисной переменной для включения в базис

Оценим эффект от введения небазисной переменной в базис. Т.к. решается задача минимизации, то (См. (1)) в базис целесообразно включать ту небазисную переменную , для которой величина

Объясняется это так: в новом БДР переменная может принять положительное значение – тогда значение целевой функции уменьшится на величину .

Если же для всех небазисных переменных , то текущее решение улучшить нельзя, следовательно оно является оптимальным.

***Пример***:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 25 | 10 | 10 |
| 10 | **5** (8) | **5** (7) | (2) | (0) |
| 15 | (2) | **15** (5) | (1) |  |
| 25 | (5) | **5** (9) | **10** (6) | **10** (4) |

Здесь:

* Обнуляем

Тогда

Для небазисных клеток:

Выберем для включения в базис ту переменую , для которой Диж самая большая по модулю: .

### Выбор переменной для исключения из базиса

Предположим, что в новом БДР приняла значение . Это означает, что в 1м столбце нарушается баланс: , следовательно, одна из базисных переменных в первом столбце должна уменьшить своё значение на величину . Однако при этом нарушается баланс в первой строке: одна из переменных должна увеличить значение. И так далее – уменьшить на w.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 25 | 10 | 10 |
| 10 | **5-W** (8) | **5+W** (3) | (2) | (0) |
| 15 | (2) | **15** (5) | (1) |  |
| 25 | +W (5) | **5-W** (9) | **10** (6) | **10** (4) |

Построили ***цикл транспортной таблицы***: 31, 11, 12, 32

Этот цикл является замкнутой ломаной, все звенья которой либо горизонтальны либо вертикальны, а все узлы располагаются в базисных клетках (кроме одного узла, который отвечает вводимой в базис переменной).

Можно показать: для данного БДР и данной переменной (которая включается в базис) цикл транспортной таблицы всегда существует и единственнен.

Для *исключения* из базиса следует выбрать ту базисную переменную, которая среди клеток с имеет наименьшее значение. Принимаем , выполняем операции в клетках, отвечающих узлам цикла, следовательно, по крайней мере одна базисная переменная обнулится. Эта переменная должна быть исключена из базиса. Если обнулится несколько базисных переменных, то из базиса следует исключить любую, но только одну.

В примере , обнуляются две переменные , исключать будем х32.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Для этого плана

Для плана на прошлом этапе:

Дальше – новая итерация. Для базисных клеток составляем уравнение того же вида , находим Диж, если они неотрицательны – решение оптимально, если хоть одно отрицательно – выбираем переменную, строим цикл и так далее.

Лекция №8 08.12.2016

Метод потенциалов

(начало)

1. построение начальной БДР с использованием например метода СЗ угла

2. для базисных клеток составить систему вравнений вида Ui+Vj=Cij

3. решит эту систему, придав произвольной неизвестной произвольное значение

4. для небазисных клеток вычислить d\_ij=c\_ij-u\_i-v\_j

5. < все d\_ij>=0? >

да:

/х - текущая БДР /

/f(x) - оптимальное значение f /

(конец)

нет:

6. 1) выбрать клетку, отвечающую минимальной d\_ij (т.е. максимальной по модулю среди отрицательных)

2) соответствующая переменная будет включена в базис

7. построить цикл транспортной задачи, начиная с клетки, отвечающей вводимой в базис переменной

8. в узлах цикла расставить +w, -w, +w, -w, ..., начиная с клетки, отвечающей вводимой в базис переменной

9. выбрать в качестве w наименьшее значение x\_ij в клетках, отвечающих "-w"

10. произвести "перекачку" по циклу. одну из обнулившихся переменных исключить из базиса. включить в базис выбранную выше переменную

GOTO 2

Сюда рисуок

Рассмотрим прошлый пример

***Пример***:

(рисунок таблицы \*)

2-я итерация:

Выбираем -7, 1\_3 нужно будет включить в базис, получим цикл 1\_3, 3\_3, 3\_1, 1\_1 (меняем как +w –w +w –w)

W=0, x11 из базиса

3-я итерация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

х32 в базис, w=10, x12 или x33 из базиса (например х12), цикл 13,33,32,12 (+w –w +w –w)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

4я итерация

X23 в базис, х33 из базиса. Цикл 23,33,32,22

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

5-я итерация

Х14 в базис, w=10, x34 или 13 из базиса

Цикл: 14, 44, 42,22,23,13

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

6-я итерация

Текущее БДР является оптимальным.

## Задача о назначениях

Математическая постановка:

Легко видеть, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи для

Условие можно заменить условием , т.к. поскольку все , то любое БДР задачи о назначениях как транспортной задачи будет целочисленным. В силу ограничений (\*) и (\*\*) ни одна из перменных хиж не сможет принять значение 2 или больше.

Замечание: Т.к. любое БДР транспортной задачи содержит базисную переменную, а любое допустимое решение задачи о назначениях содержит лишь единиц, то любое БДР задачи о назначениях как транспортной задачи будет вырожденным (т.е. некоторые базисные переменные будут иметь нулевые значения).